Chapitre 3

Equations différentielles

3.1 Généralités

3.1.1 Définition

Une équation différentielle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est une équation de la forme :

$$f(x, y, y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n)}) = 0, (1)$$

où f est une application d'une partie D de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$, y est une fonction n fois continûment dérivable de la variable x et $y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n)}$ les dérivées successives, par rapport à x, de y. Une solution de (1) est par définition une application n fois continûment dérivable qu'on note encore $y : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, on ait :

$$\begin{cases} (x, y(x), y^{'}(x), y^{''}(x), ..., y^{(n)}(x)) \in D \text{ et} \\ f(x, y(x), y^{'}(x), y^{''}(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0 \end{cases}.$$

3.1.2 Définition

On dit que l'équation différentielle (1) est donnée sous forme résolue, si elle est du type :

$$y^{(n)} = g(x, y, y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n-1)})$$

où g est une application de de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

3.1.3 Système différentiel

On appel système différentiel du 1^{er} ordre, tout système du type :

$$y_1^{'} = g_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)$$
$$y_2^{'} = g_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)$$
$$.$$
$$.$$
$$y_n^{'} = g_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$$

où $y_1, y_2, ..., y_n$ sont n fonctions inconnues de la variable x et $g_1, ..., g_n$ n applications de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$

3.2 Equations différentielles du premier ordre

3.2.1 Définition

On appelle équation différentielle du premier ordre une équation de la forme $f(x, y, y^{'}) = 0$ ou sous forme résolue $y^{'} = g(x, y)$.
Le type le plus simple équation différentielle du premier ordre est $y^{'} = f(x)$ où $f : I \to \mathbb{R}$ est une application continue définie sur I un intervalle non réduit à un point.
l'ensemble des solutions est l'ensemble de toutes les primitives de f soit $y(x) = F(x) + c$ où F est une primitive fixée de f et c est une constante arbitraire.

3.2.2 Equations à variables séparables

3.2.2.1 Définition

Une équation différentielle du 1^{er} ordre à variables séparables est une équation de la forme : $f(y)y^{'} = g(x)$.
Une telle équation peut s'écrire aussi sous la forme $f(y)dy = g(x)dx$
où f et g sont des applications continues sur des intervalles de $\mathbb{R}$

3.2.2.2 Théorème

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications continues sur des intervalles de $\mathbb{R}$, F et G des primitives respectives de f et g. Soit J' un sous intervalle de J. Une application dérivable $y : J' \to I$ est solution de $f(y)y' = g(x)$ si et seulement si il existe une constante c telle que $F(y(x)) = G(x) + c$ pour tout $x \in J'$, c'est à dire $\int f(y)dy = \int g(x)dx$.

3.2.2.3 Exemple

Soit à intégrer : $y' - xy = 0$. Cette équation est équivalente à : $y' = xy$.
C'est une équation à variables séparables $\frac{1}{y}y' = x$.
Ce qui implique $\int \frac{1}{y}dy = \int \ xdx$, soit $ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + c$.
D'où $y = ke^{\frac{1}{2}x^2}$ où k est une constante.

3.2.3 Equations différentielles linéaires du premier ordre

3.2.3.1 Définition

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation différentielle de la forme : $y' + f(x)y = g(x)$ où $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont des applications continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.
Cette équation est dite sans second membre ou homogène si $y' + f(x)y = 0$.
L'équation homogène est une équation à variables séparables dont une solution générale est de la forme
$y_h = ke^{-F(x)}$ où k est une constante arbitraire et F est une primitive de f.

3.2.3.2 principe de résolution

La solution générale de l'équation différentielle linéaire notée y est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée y_h et d'une solution particulière y_p de l'équation différentielle linéaire du premier ordre. Soit : $y = y_h + y_p$.

3.2.3.3 Recherche de la solution particulière : méthode de la variation des constantes

Si $y_h = ke^{-F(x)}$ est la solution générale de l'équation homogène, la méthode de la variation des constantes consiste à prendre pour nouvelle fonction inconnue la fonction : $x \mapsto k(x)$ liée à l'ancienne inconnue y par $y_p = k(x)e^{-F(x)}$. En dérivant et en remplaçant y_p et $y_p^{'}$ par leurs valeurs dans l'équation différentielle linéaire du premier ordre on détermine $k(x)$ et par suite $y_p(x)$.

3.2.3.4 Exemple

Soit à intégrer l'équation (E) : $y^{'} - \frac{3}{x}y = x$.
L'équation homogène associée à (E) est $y^{'} - \frac{3}{x} = 0$ ce qui équivaut à

$$\frac{y^{'}}{y} = \frac{3}{x}$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{3}{x}dx$$

$$ln|y| = 3ln|x| + c$$

$$y = kx^3$$

où k est constante arbitraire.
La recherche de la solution de la particulière consiste à trouver une solution particulière sous la forme $y_p = k(x)x^3$ donc $y_p^{'} = x^3k^{'}(x) + 3x^2k(x)$ en remplaçant y_p et $y_p^{'}$ dans l'équation (E) on a

$$y_p^{'} - \frac{3}{x}y_p = x$$

$$k^{'}(x)x^3 + 3k(x)x^2 - \frac{3}{x}k(x)x^3 = x$$

$$k^{'}(x)x^3 = x$$

$$k^{'}(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$k(x) = -\frac{1}{x}$$

. la solution particulière est donc $y_p = -x^2$. La solution générale de l'équation (E) est donc $y = cx^3 - x^2$ où c est une constante arbitraire.

Intégrer l'équation $x(x+1)y^{'} - (x+2)y = 2x$
L'équation homogène associé est $x(x+1)y^{'} - (x+2)y = 0$ ce qui équivaut à :

$$\frac{y^{'}}{y} = \frac{x+2}{x(x+1)}$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{x+2}{x(x+1)}dx$$

$$ln|y| = ln|\frac{x^2}{x+1}| + c$$

$$y_h = k\frac{x^2}{x+1}$$

La solution particulière est de la forme $y_p = k(x)\frac{x^2}{x+1}$ donc $y_p^{'} = k^{'}(x)\frac{x^2}{x+1} + k(x)\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}$. En remplaçant dans l'équation on a :

$$x(x+1)y_p^{'} - (x+2)y_p = 2x$$

$$x(x+1)[k^{'}(x)\frac{x^2}{x+1} + k(x)\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}] - (x+2)k(x)\frac{x^2}{x+1} = 2x$$

$$k'(x)x^3 = 2x$$

$$k(x) = \frac{-2}{x}$$

La solution particulière est donc $y_p = \frac{-2}{x}\frac{x^2}{x+1} = \frac{-2x}{x+1}$. La solution générale de l'équation est $y = k\frac{x^2}{x+1} - \frac{2x}{x+1}$ oÃ$^1kestuneconstantearbitraire$

3.2.4 Equations de Bernoulli

L'équation de Bernoulli est une équation différentielle du premier ordre de la forme :

$$y^{'} + \lambda(x)y = \beta(x)y^{\alpha}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$, λ et β sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si $\alpha = 1$ on a $y^{'} + (\lambda(x) - \beta(x))y = 0$ qui est une équation différentielle du premier ordre à variables séparables.
Si $\alpha \neq 1$ on se ramène à une équation du premier ordre en posant $u = y^{1-\alpha}$. On a alors $u^{'} = (1-\alpha)y^{'}y^{-\alpha}$ puis on remplace dans l'équation et on obtient $u' + (1-\alpha)\lambda(x)u = (1-\alpha)\beta(x)$

3.2.4.1 Exemple

Soit à résoudre l'équation différentielle : $y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{y}$ on a $\lambda(x) = -\frac{1}{x}$, $\beta(x) = 1$ et $\alpha = -1$. On pose $u = y^2$ donc $u^{'} = 2yy^{'}$. En remplaÃ§ant dans l'équation on a $u^{'} - 2\frac{1}{x}u = 2$. L'équation homogène associé est : $u^{'} - 2\frac{1}{x}u = 0$ dont la solution est $u_h = kx^2$
La solution particulière est de la forme $u_p = k(x)x^2$ donc $u_p^{'} = k^{'}(x)x^2 + 2xk(x)$ puis en remplaçant dans l'équation on a :

$$k^{'}(x)x^2 + 2xk(x) - \frac{2}{x}x^2k(x) = 2$$

$$k^{'}(x) = \frac{2}{x^2}$$

$$k(x) = -\frac{2}{x}$$

Une solution particulière est donnée par $u_p = -2x$ La solution de l'équation d'inconnue u est $u = kx^2 - 2x$. On en déduit la solution de l'équation d'inconnue y qui est donnée par : $y = \pm\sqrt{kx^2 - 2x}$

3.3 Equations différentielles du second ordre

3.3.1 Définition

On appelle équation différentielle du second ordre, une équation de la forme :

$$f(x, y, y^{'}, y^{''}) = 0.$$

Une telle équation peut encore se mettre sous la forme résolue

$$y^{''} = g(x, y, y^{'})$$

où y est une fonction inconnue de x.

3.3.2 Equation incomplète

Si dans l'équation sous forme résolue, y n'apparaît pas , on a alors $y^{''} = g(x, y^{'})$ En posant $y^{'} = z$ on se ramène à l'intégration successive de deux équations différentielles du 1^{er} ordre c'est à dire :

$$z^{'} = g(x, z)$$

et

$$y^{'} = z$$

3.3.2.1 Exemple

Soit à intégrer l'équation : $y'' - \frac{2}{x+1}y^{'} = 2$ posons $y^{'} = z$ on obtient $z^{'} - \frac{2}{x+1}z = 2$ dont l' équation homogène associée est $z^{'} - \frac{2}{x+1}z = 0$ ce qui est équivalent :

$$\frac{z^{'}}{z} = \frac{2}{x+1}$$

$$\frac{1}{z}dz = \frac{2}{x+1}dx$$

$$ln|z| = 2ln|x+1|$$

Soit $z_h = k(x+1)^2$. La solution particulière est de la forme $z_p = k(x)(x+1)^2$ donc $z_p^{'} = k^{'}(x+1)^2 + 2(x+1)k(x)$. En remplaçant dans l'équation on a :

$$k^{'}(x)(x+1)^2 + 2(x+1)k(x) - \frac{2}{x+1}k(x)(x+1)^2 = 2$$

$$k^{'}(x)(x+1)^2 = 2$$

$$k(x) = -\frac{2}{x+1}$$

D'où $z_p = -2(x+1)$ par suite $z = k(x+1)^2 - 2(x+1)$ on en déduit $y^{'} = k(x+1)^2 - 2(x+1)$ c'est à dire $y = \frac{k}{3}(x+1)^3 - (x+1)^2$

3.3.3 Equations différentielles linéaires du 2^{nd} ordre à coefficients constants

3.3.3.1 Définition

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, une équation différentielle de la forme :

$$y'' + ay' + by = c(x)$$

où a, b sont des constantes et c est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
L'équation différentielle linéaire du second ordre est dite homogène ou sans second membre, si elle est de la forme :

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Remarque : L'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants peut s'écrire sous la forme générale $dy'' + ay' + by = c(x)$. Cette forme générale se ramène sous la forme précédente en divisant chaque membre par d ($d \neq 0$).

3.3.3.2 Résolution de l'équation homogène associé

Pour déterminer la solution générale de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$, on cherche deux solutions linéairement indépendantes de la forme $y = e^{rx}$ où r est un nombre à déterminer. Donc $y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2e^{rx}$ puis en remplaçant dans l'équation homogène on a :

$$(r^2 + ar + b)e^{rx} = 0$$

soit

$$r^2 + ar + b = 0$$

Le polynôme $P(r) = r^2 + ar + b$ est appellé polynôme caractéristique et l'équation $r^2 + ar + b = 0$ est appellée équation caractéristique.
.Si l'équation $P(r) = 0$ admet deux racines distincts réelles r_1 et r_2 alors la solution

générale de l'équation homogène est : $y_h = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ où λ et μ sont des constantes arbitraires.
.Si l'équation $P(r) = 0$ admet une racine double r alors la solution générale de l'équation homogène est de la forme $y_h = (\lambda x + \mu)e^{rx}$ où λ et μ sont des constantes arbitraires.
.Si l'équation $P(r) = 0$ admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \rho + i\omega$ et $r_2 = \rho - i\omega$ alors la solution générale de l'équation homogène est $y_h = (\lambda cos(\omega x) + \mu sin(\omega x))e^{\rho x}$ où λ et μ son des constantes arbitraires.
Exemple : intégrer l'équation $y'' + 6y' + 25y = 0$. L'équation caractéristique associé est $r^2 + 6r + 25 = 0$ le discriminant réduit $\Delta' = 9 - 25 = -16$ et les racines complexes sont $r_1 = -3 - 4i$ et $r_2 = -3 + 4i$. Par suite la solution générale de l'équation homogène est $y_h = (\lambda cos(4x) + \mu sin(4x))e^{-3x}$

3.3.3.3 résolution de l'équation complète

Pour résoudre l'équation complète $y'' + ay' + by = c(x)$, on cherche la solution générale de l'équation homogène associée y_h puis on cherche une solution particulière y_p de l'équation complète. La solution générale del'équation complète y est la somme $y = y_h + y_p$.

(a) Principe de superposition
Dans la recherche d'une solution particulière de l'équation complète si le second membre $c(x)$ est une somme de fonctions $c_i(x)$ c'est à dire $c(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)$. On cherche pour chaque $i = 1, \cdots, n$ une solution particulière y_{p_i} de l'équation $y'' + ay' + by = c_i(x)$. Une solution particulière de l'équation complète est donc donné par : $y_p = \sum_{i=1}^{n} y_{p_i}$

(b) Si $c(x)$ est un polynôme de degré n.
On cherche y_p sous la forme d'un polynôme :
- de degré n si $b \neq 0$
- de degré $(n+1)$ si $b = 0$ et $a \neq 0$
- de degré $(n+2)$ si $a = 0$ et $b = 0$

(c) Si c(x) est de la forme $Q(x)e^{\alpha x}$ où $Q(x)$ est un polynôme de degré n, et α un réel.
On cherche y_p sous la forme $y_p(x) = Q_1(x)e^{\alpha x}$ où Q_1 est un polynôme qui est tel que :
-$degQ_1 = n$ si α n'est pas racine du polynôme caractéristique
-$degQ_1 = n + 1$ si α est une racine simple du polynôme caractéristique
-$degQ_1 = n + 2$ si α est racine double du polynôme caractéristique
Exemple : soit à intégrer : $y'' + 2y' + y = x^2e^x$. Le polynome caractéristique est $P(r) = r^2 + 2r + 2$ dont la racine double est donné par $r_0 = -1$ la solution générale de l'équation homogène est donc $y_h = (\lambda x + \mu)e^{-x}$. On cherche la solution particulière y_p sous la forme $y_p = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^x$. On en déduit $y'_p = (\alpha x^2 + (2\alpha + \beta)x + \beta + \gamma)e^x$ en remplaçant dans l'équation on obtient $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$ et $\gamma = \frac{3}{8}$
La solution particulière est donc $y_p = (\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8})e^x$, par suite la solution de l'équation complète est donné par $y = (\lambda x + \mu)e^{-x} + (\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8})e^x$

(d) si $c(x)$ est de la forme $c(x) = (Q(x)cos(\omega x) + R(x)sin(\omega x))e^{\rho x}$ où $\omega \in \mathbb{R}^*$, $\rho \in \mathbb{R}$ et Q, R sont des polynômes
On cherche y_p sous la forme $y_p = (Q_1(x)cos(\omega x) + R_1(x)sin(\omega x))e^{\rho x}$ où Q_1 et R_1 sont des polynômes tels que $(degQ_1, degR_1) = k + max(degQ, degR)$ avec $k = \begin{cases} 0 \text{ si } P(\rho + i\omega) \neq 0 \\ 1 \text{ si } P(\rho + i\omega) = 0 \end{cases}$; où P est le polynôme caractéristique.
Exemple : intégrer l'équation $y'' - 2y' + 2y = 2e^x sin(x)$
L' équation homogène est $y'' - 2y' + 2y = 0$ et les racines du polynome caractéristique sont $1 + i$ et $1 - i$ et la solution de l'équation homogène $y_h = (\lambda cos(x) + \mu sin(x))e^x$
Nous avons $l = 1$, $\omega = 1$, $R(x) = 2$ et $Q(x) = 0$,$max(degQ, degR) = 0$, $P(1 + i) = 0$, $k = 1$ et $(degQ_1, degR_1) = 1$ et donc $Q_1(x) = \alpha x + \beta$, $R_1(x) = \gamma x + \delta$ avec α , β , γ et δ sont à déterminer. On a :

$$y_p = [(\alpha x + \beta)cos(x) + (\gamma x + \delta)sin(x)]e^x$$

$$y'_p = [(\gamma x + \delta + \alpha + \alpha x + \beta)cos(x) - (\alpha x + \beta + -\gamma + \gamma x + \delta)sin(x)]e^x$$

En remplaçant dans l'équation on obtient $y_p = -xcos(x)e^x$ par suite la solution de l'équation générale de l'équation complète est

$$y = (\lambda cos(x) + \mu sin(x) - xcos(x))e^x$$